LOCALISATION, CARTOGRAPHIE, MOBILITÉ

SNT
Sciences Numériques et Technologie

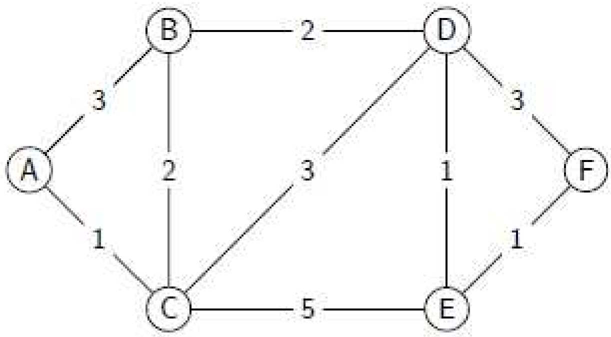
Activité 4 : *Algorithme de Dijkstra*

Objectifs de l'activité :   Durée : 03H00

- **Calculer** un itinéraire (recherche du chemin optimal).

Mise en situation :

Dans le graphe ci-contre, les sommets représentent des lieux (villes, etc.) et les nombres sur les arêtes des distances (en kilomètres, en minutes ou autre).



Pour calculer des itinéraires (plus courts, plus rapides, etc.), de nombreux algorithmes s'appuyant sur la théorie des graphes ont été développés.

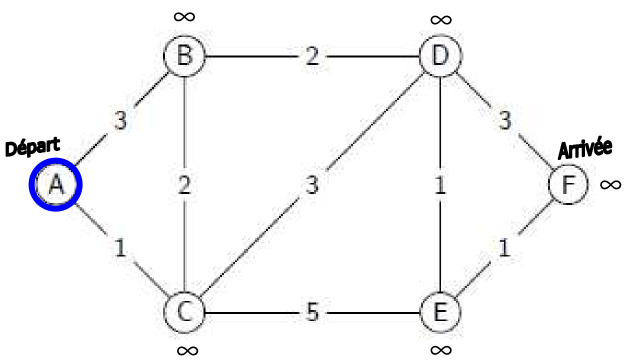
Dans la suite, l'objectif est de **calculer l'itinéraire le plus court reliant les sommets A et F**.

L'algorithme de Dijkstra :

L'algorithme de Dijkstra est un des algorithmes permettant de résoudre ce problème de plus court chemin (en distance ou en temps ou autre). Il porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra, et a été publié en 1959. En voici la mise en œuvre :

Initialisation

➲ On construit un tableau avec autant de lignes et de colonnes qu'il y a de sommets.
➲ On se place sur le **point de départ**, ici le sommet **A** ; la distance parcourue cumulée vaut alors 0 (on est au début…).
➲ On fixe la distance entre **A** et tous les autres sommets à l'infini (∞).
➲ On bloque la colonne « A » car on ne repassera pas par le point **A** (sinon on n'est pas sur le trajet optimisé).



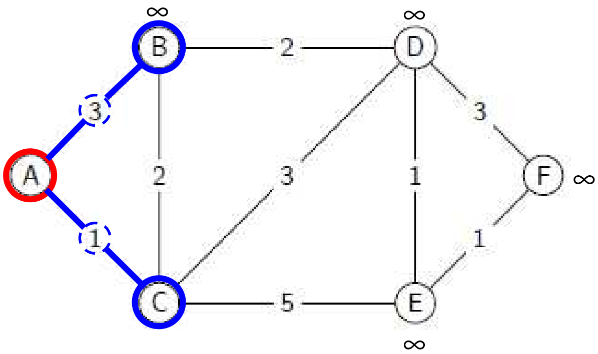
A	B	C	D	E	F
0	∞	∞	∞	∞	∞
Bloquée					

Recherche du sommet optimal après A

➲ Partant de **A**, on recherche les sommets adjacents, c'est-à-dire **directement** accessibles ; il y a **B** et **C**.

➲ On ajoute au cumul précédent (0) les distances pour rejoindre les sommets **B** et **C**. Si un cumul est inférieur à celui présent au-dessus (dans le tableau), alors on laisse la valeur antérieur (ce n'est le cas ni pour la colonne **B**, ni pour la colonne **C**).

➲ On retient la plus faible valeur (ici 1) et on bloque la colonne correspondante (**C**) car on n'y repassera plus.



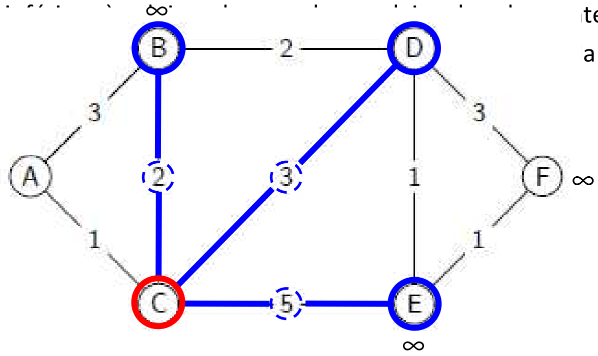
A	B	C	D	E	F
0	∞	∞	∞	∞	∞
	3 (A)	**1 (A)**	∞	∞	∞
		Bloquée			

Recherche du sommet optimal après C

➲ Partant de **C**, on recherche les sommets adjacents ; il y a **B**, **D** et **E**.

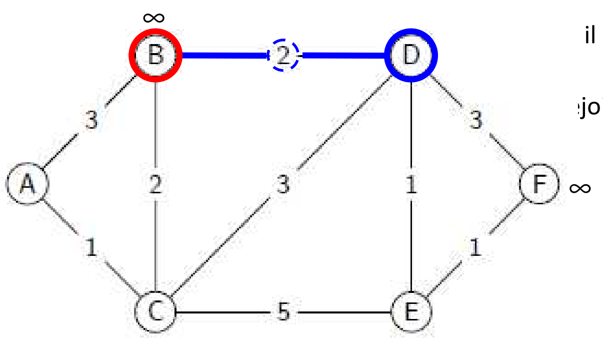
➲ On ajoute au cumul précédent (1) les distances pour rejoindre les sommets adjacents à **C**. A nouveau, si un cumul est ...térieure (c'est le cas pour B)

a co...



A	B	C	D	E	F
0	∞	∞	∞	∞	∞
	3 (A)	**1 (A)**	∞	∞	∞
	3 (A)		4 (C)	6 (C)	∞
	Bloquée				

Recherche du sommet optimal après B



il n'...

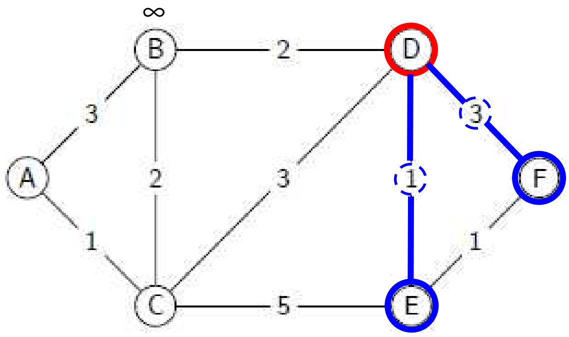
...joint... ue.

A	B	C	D	E	F
0	∞	∞	∞	∞	∞
	3 (A)	**1 (A)**	∞	∞	∞
	3 (A)		4 (C)	6 (C)	∞
			4 (C)	6 (C)	∞
			Bloquée		

Recherche du sommet optimal après D

➲ Partant de **D**, on recherche les sommets accessibles ; il y a **E** et **F**.

➲ On ajoute au cumul précédent (4) la distance pour rejoindre le sommet **F** : 4 + 1 = 5 < 6 donc on retient 5 (D).

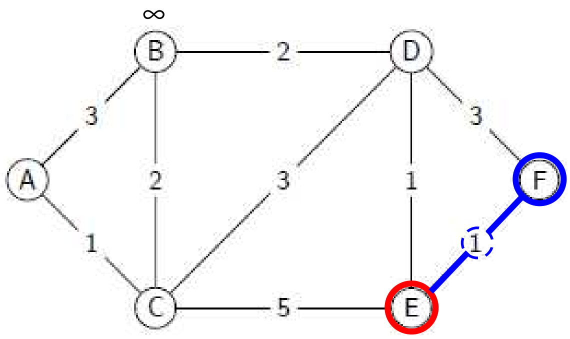


A	B	C	D	E	F
0	∞	∞	∞	∞	∞
	3 (A)	**1 (A)**	∞	∞	∞
	3 (A)		4 (C)	6 (C)	∞
			4 (C)	6 (C)	∞
				5 (D)	7 (D)
				Bloquée	

Recherche du sommet optimal après E

➲ Partant de **E**, on recherche les sommets accessibles ; il n'y a que **F**.

➲ On ajoute au cumul précédent (5) la distance pour rejoindre le sommet **F** : 5 + 1 = 6 < 7 donc on retient 6 (E).



A	B	C	D	E	F
0	∞	∞	∞	∞	∞
	3 (A)	**1 (A)**	∞	∞	∞
	3 (A)		4 (C)	6 (C)	∞
			4 (C)	6 (C)	∞
				5 (D)	7 (D)
					6 (E)

Exploitation du tableau

On en tire deux informations qui composent la conclusion :

→ **La plus courte distance** entre les points de départ et d'arrivée : A -> F = 6 unités.

→ **Le chemin suivi :** A – C – D – E – F

APPLICATIONS

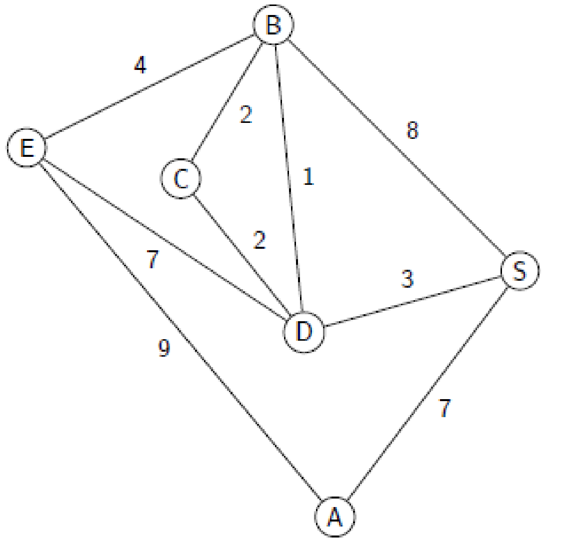
Exercice 1 — Spectacle de fin d'année

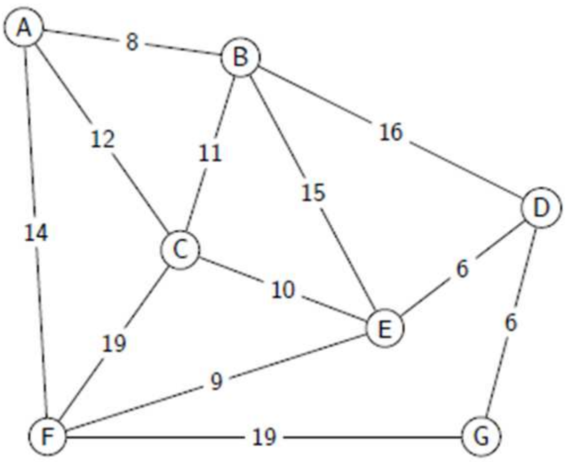
Naïma fait partie d'une école de musique. En vue du spectacle de fin d'année, elle souhaite déposer à vélo des affiches publicitaires sur les panneaux de sa ville.

Les pistes cyclables reliant ces panneaux sont représentées sur le graphe ci-contre. Le sommet E désigne son école de musique, le sommet S la salle de spectacle et les sommets A, B, C, et D les panneaux d'affichage.

Lorsqu'elle a déposé ses affiches, Naïma a relevé le temps de trajet entre chaque panneau d'affichage. Ces durées, exprimées en minutes, sont indiquées sur les arêtes du graphe.

➘ **Indiquer** à Naïma le trajet le plus rapide qu'elle doit emprunter pour aller de l'école de musique à la salle de spectacle et donner la durée de ce parcours.





Exercice 2 — Un investisseur immobilier

Un agent immobilier doit visiter plusieurs biens à vendre dans une ville.

Le graphe ci-contre représente le plan de la ville.

Les biens à visiter sont identifiés par les lettres A, B, C, D, E, F et G.

Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minutes, entre deux biens.

Lorsque l'investisseur immobilier ter mine ses visites par le bien A, il souhaite revenir au bien G le plus rapidement possible.

➘ **Déterminer** le plus court chemin en temps et donner sa durée en minutes.

Exercice 3 — Au centre de vacances

Le graphe ci-contre représente le plan d'un centre de vacances. Les arêtes représentent les allées et les sommets, les carrefours.

On a indiqué sur chaque arête la longueur en mètres des allées entre deux carrefours.

➘ **Déterminer** en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet le plus court pour aller du carrefour A au carrefour G et indiquer sa longueur en mètres.